

نیم‌گروه‌ها یی که دو-سیستم قطری آنها متناهیاً تولید شده نیست

اکبر گلچین

دانشگاه سیستان و بلوچستان *agdm@math.usb.ac.ir*

لیلا نوری

دانشگاه سیستان و بلوچستان *l_noori85@yahoo.com*

چکیده

به دنبال سؤال مطرح شده در ماهنامه ریاضی آمریکا [۵] در مورد مولدهای متناهی سیستم‌های راست قطری، در این مقاله با ارائه بعضی از نیم‌گروه‌های خاص نشان می‌دهیم که دو-سیستم قطری آنها متناهیاً تولید شده نیست و لذا دو-سیستم قطری چنین نیم‌گروه‌هایی نیز دوری نمی‌باشد.

۱ مفاهیم و تعاریف مقدماتی

در این مقاله دو-سیستم قطری بعضی از نیم‌گروه‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در سراسر این مقاله S یک نیم‌گروه است و $S^1 = S \cup \{1\}$.

تعریف ۱. نیم‌گروه S روی مجموعه‌ی ناتهی X از راست عمل می‌کند، هرگاه نداشت $X \times S \rightarrow X$ با ضابطه $(x, s) \mapsto xs$ موجود باشد.

X روی نیم‌گروه S یک دو-سیستم است، هرگاه S روی X عمل کند هم از چپ و هم از راست و برای هر $x \in X$ و هر $s_1, s_2 \in S$ ، $(s_1 x) s_2 = s_1 (x s_2)$.

فرض کنید S روی $S \times S$ با ضرب مؤلفه‌ای از راست و چپ عمل کند، یعنی برای هر واژه‌های کلیدی: دو-سیستم قطری، متناهیاً تولید شده.

دو- سیستم قطری S می‌نامیم و با $(S \times S)$ نمایش می‌دهیم. دو- سیستم قطری S را متناهیاً تولید شده گوئیم هرگاه برای $U \subseteq S$ ای متناهی، $S \times S = S^1(U \times U)S^1$.

تعریف ۲. نیم گروه S را یک باند مستطیلی گوئیم، هرگاه به ازای هر $a, b \in S$ ، $aba = a$. عنصر a از نیم گروه S را خود توان گوئیم در صورتی که $a^2 = a$. مجموعه تمام عناصر خودتوان S را با $E(S)$ نشان می‌دهیم. اگر $S = E(S)$ آن گاه S را یک نیم گروه خودتوان یا یک باند می‌نامیم.

تعریف ۳. زیر مجموعه‌ی ناتهی I از نیم گروه S را یک اید آل S گوئیم، اگر $SI \subseteq I$ و $IS \subseteq I$. اگر $a \in S$ ، $S^1 a S^1$ را اید آل اصلی تولید شده توسط a می‌نامیم. S را نیم گروه اید آل اصلی گوئیم هرگاه همه اید آلهای آن اصلی باشند. رابطه \mathcal{J} روی S به این صورت که $a \mathcal{J} b$ اگر و تنها اگر $S^1 a S^1 = S^1 b S^1$ ، یک رابطه هم‌ارزی است و \mathcal{J} -کلاس شامل a را با J_a نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴. یک نیم گروه بدون صفر، ساده نامیده می‌شود هرگاه فاقد اید آل سره باشد. نیم گروه صفردار S ، 0 - ساده نامیده می‌شود هرگاه:
(i) $\{0\}$ و S تنها اید آلهای آن باشند. (ii) $S^2 \neq \{0\}$.

تعریف ۵. فرض کنید (X, \leq) یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد. گوئیم (X, \leq) یک نیم لاتیس پایین است، هرگاه برای هر $a, b \in X$ ، بزرگترین کران پایین $(a \wedge b)$ موجود باشد. نیم گروه S یک نیم لاتیس از زیر نیم گروههای S_α ، $\alpha \in Y$ است هرگاه:

(۱) Y یک نیم لاتیس پایین باشد.

$$(۲) S = \cup_{\alpha \in Y} S_\alpha$$

(۳) برای هر $\alpha, \beta \in Y$ ، $S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$ که حاصل ضرب α و β در Y است.

لم ۱. اگر دو- سیستم قطری S متناهیاً تولید شده، T زیر نیم گروهی از S و $S \setminus T$ (متمم T) یک اید آل S باشد، آنگاه دو- سیستم قطری T متناهیاً تولید شده است.

نیم‌گروه‌هایی که دو-سیستم قطری آنها متناهیاً تولید شده نیست _____ ۱۱

لم ۲. دو-سیستم قطری S متناهیاً تولید شده است اگر، و تنها اگر دو-سیستم قطری $S^\circ = S \cup \{0\}$ متناهیاً تولید شده باشد.

لم ۳. اگر S نامتناهی و دارای دو-سیستم قطری متناهیاً تولید شده باشد، آنگاه هر \mathcal{T} -کلاس ماکسیمال دارای همان عدد اصلی S است.

قضیه ۱. اگر S نامتناهی و دارای دو-سیستم قطری متناهیاً تولید شده باشد، آنگاه S یک نیم‌گروه اید آل اصلی و دارای یک \mathcal{T} -کلاس ماکسیمال با عدد اصلی S است.

قضیه ۲. اگر S یک نیم‌گروه کاملاً 0 -ساده نامتناهی باشد، آنگاه دو-سیستم قطری S متناهیاً تولید شده است، اگر و تنها اگر S یک گروه با تعداد متناهی کلاسهای مزدوج به همراه صفر الحاقی باشد.

۲ نیم‌گروه‌هایی که دو-سیستم قطری آنها متناهیاً تولید شده نیست

قضیه ۳. اگر S یک نیم‌گروه تعویض‌پذیر نامتناهی باشد، آنگاه دو-سیستم قطری S متناهیاً تولید شده نیست.

قضیه ۴. [۱] فرض کنید S یک نیم‌گروه بدون صفر باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

(۱) S کاملاً ساده است.

(۲) S منظم است و برای هر $a, b \in S$ ، اگر $aba = a$ ، آنگاه $bab = b$.

قضیه ۵. اگر S یک باند مستطیلی نامتناهی باشد، آنگاه دو-سیستم قطری S متناهیاً تولید شده نیست.

قضیه ۶. فرض کنید Y یک مجموعه و برای هر $\alpha \in Y$ ، τ_α نیمگروهی باشد که دو - سیستم قطری آن متناهیاً تولید شده نباشد، مگر اینکه τ_α متناهی باشد. اگر S یک نیمگروه نامتناهی و یک نیم‌لاتیس از τ_α ها باشد، آنگاه دو - سیستم قطری S متناهیاً تولید شده نیست.

قضیه ۷. [۱] فرض کنید S یک باند باشد. در این صورت S یک نیم‌لاتیس از باندهای مستطیلی است.

نتیجه. اگر S یک باند نامتناهی باشد، آنگاه دو - سیستم قطری S متناهیاً تولید شده نیست.

مراجع

- [1] J. M. HOWIE, *Fundamentals of Semigroup Theory*, Oxford Science Publications, Oxford, 1995.
- [2] M. KILP, U. KNAUER, A. MIKHALEV, *Monoids, Acts and Categories*, Walter de Gruyter, Berlin, 2000.
- [3] P. GALLAGHER, *On the Finite and Nonfinite Generation of Diagonal Act*. Comm. Algebra (2006), 34, 3123-3137.
- [4] P. M. HIGGINS, *Techniques of Semigroup Theory*, Oxford, Oxford University Press, (1992).
- [5] S. BULMAN-FLEMING, AND K. MCDOWELL, *Problem E3311*, Amer. Math. Monthly 96 (1989), 155; Solution, Amer. Math. Monthly 97 (1990), 617.