بیستمین سمینار جبر،
۲ و ۳ اردیبهشت ۱۳۸۸، صفحه۱۳–۱۶،
دانشگاه تربیت معلم

حلقه‌های تقسیم و ابرمیدان‌ها

سعید میروکیلی
دانشگاه پیام نور استان یزد مرکز مهریز– گروه ریاضی
saeed_mirvakili@yahoo.com

چکیده

در این مقاله به بررسی روابط اساسی روی ابرمیدان‌ها می‌پردازیم. رابطه Γ را که اوّلین بار توسط وجیوک‌لیس (۱۹۹۰) تعریف شده است در نظر گرفته و با استفاده از مفهوم زیرمجموعه‌های کامل ابرمیدان‌ها، نشان می‌دهیم این رابطه روی ابرمیدان‌های دلخواه یک رابطه هم‌ارزی، با رابطه اساسی Γ^* برابر و R/Γ حلقه تقسیم است.

۱ مقدمه

فرض کنیم R یک مجموعه ناتهی، $+$ و $\cdot$ ابرعمل‌های تعریف شده بر R باشند.

$$+ : R \times R \to P^*(R), (x, y) \to x + y \subseteq R,$$
$$\cdot : R \times R \to P^*(R), (x, y) \to x \cdot y \subseteq R.$$

دستگاه جبری $(R, +, \cdot)$ یک ابرحلقه نامیده می‌شود، هرگاه $(R, +)$ ابرگروه ، $(R, \cdot)$ نیم‌ابرگروه و ابرعمل $\cdot$ نسبت به ابرعمل $+$ دارای خاصیت توزیع‌پذیری باشد.

اگر در ساختار فوق $(R, +)$ یک نیم‌ابرگروه باشد، دستگاه جبری $(R, +, \cdot)$ را یک نیم‌ابرحلقه می‌نامند. منظور از ابرمیدان، ابرحلقه $(R, +, \cdot)$ است که در آن $(R, \cdot)$ یک ابرگروه باشد.

واژه های کلیدی: حلقه تقسیم، ابرمیدان، رابطه اساسی، رابطه هم‌ارزی.
رده بندی موضوعی (MSC2000): 20N20، 16Y9.

۲ رابطه اساسی Γ^* روی ابرمیدان‌ها

رابطه Γ^* برای اوّلین بار توسط وجیوک‌لیس [۵] روی ابرحلقه‌ها تعریف شد. در واقع رابطه اساسی Γ^* ارتباط بین نظریه ابرحلقه‌ها و نظریه حلقه‌ها را بیان می‌کند. فرض کنید $(R, +, \cdot)$ یک نیم‌ابرحلقه باشد. رابطه Γ روی R را برای هر $a, b \in R$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a \ \Gamma \ b \ \Leftrightarrow \exists [n \in N, \ k_i \in N, (z_{i1}, \ \ldots, z_{ik_i}) \in R^{k_i}]. \ \{a, b\} \subset \sum_{i=1}^{n} (\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}),$$

به آسانی دیده می‌شود که رابطه Γ یک رابطه انعکاسی و تقارنی است. بستار انتقالی رابطه Γ را با Γ^* نشان می‌دهیم. بنابراین رابطه Γ^* یک رابطه هم ارزی روی R است و ردهٔ هم‌ارزی عضو $a \in R$ تحت رابطه Γ^* را با $\Gamma^*(a)$ نشان می‌دهیم. وجیوک‌لیس نشان داد Γ^* کوچکترین رابطه هم‌ارزی روی ابرحلقه R است به‌طوری‌که R/Γ^* یک حلقه عمومی (حلقه‌ای که لزوماً با عمل + جابجایی نیست) است. رابطه Γ^* را رابطه اساسی روی ابرحلقه R و حلقه R/Γ^* را حلقه اساسی گوییم. همچنین اگر R یک ابرمیدان باشد آنگاه R/Γ^* یک حلقه تقسیم عمومی (حلقه‌ی تقسیمی که لزوماً با عمل + جابجایی نیست) می‌باشد.

تعریف ۱. فرض کنید M زیرمجموعه‌ی ناتهی ابرحلقه R باشد. M را زیرمجموعه کامل گوییم هرگاه برای هر $n \in N$، هر $i = 1, \ldots, n$، هر عدد $k_i \in N$ و هر $(z_{i1}, \ldots, z_{ik_i}) \in R^{k_i}$، داشته باشیم

$$\sum_{i=1}^{n} (\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}) \bigcap M \neq \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} (\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}) \subseteq M.$$

همچنین، فرض کنید M زیرمجموعه ناتهی ابرحلقه R باشد. اشتراک همه زیرمجموعه‌های کامل R را که شامل M است بستار کامل M نامیده و آن را با $\mathcal{C}(M)$ نشان می‌دهیم.

حلقه اساسی R/Γ^* را در نظر گرفته و فرض کنید R/Γ^* دارای عضو یکانی $1_{R/\Gamma^*}$ (با عمل ضرب) و $\phi : R \to R/\Gamma^*$ تصویر کانونی باشد. قرار دهید $w_R = \phi^{-1}(1_{R/\Gamma^*})$ (w_R را قلب ابرحلقه R نامیده می‌شود). اگر ابرمیدان $(R, +, \cdot)$ را در نظر بگیریم، آنگاه حلقه تقسیم R/Γ^* دارای عضو یکانی $1_{R/\Gamma^*}$ است و لذا w_R وجود دارد.

قضیه ۱. فرض کنید A یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از ابرمیدان R باشد. در این صورت A یک زیرمجموعه‌ی کامل از R است اگر و تنها اگر $A = A \cdot w_R = w_R \cdot A$.

قضیه ۲. فرض کنید A یک زیرمجموعه‌ی کامل و B یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از ابرمیدان R باشد. در این صورت $A\cdot B$ و $B\cdot A$ زیرمجموعه‌های کامل از ابرمیدان R هستند.

فرض کنید $(R,+,\cdot)$ یک ابرمیدان و SC خانواده‌ی همه زیرابرگروه‌های $(R,\cdot)$ باشد به‌قسمی‌که زیرمجموعه‌ی کامل از R نیز هستند. در این صورت داریم:

قضیه ۳. قلب ابرمیدان R برابر است با اشتراک همه زیرابرگروه‌های $(R,\cdot)$ که زیرمجموعه کامل هستند، یعنی $w_R = \bigcap\limits_{A\in SC} A$.

قبل از بیان قضیه بعدی نماد گذاری‌های زیر را در نظر بگیرید. برای هر عضو z از ابرمیدان R، قرار دهید:

$$P(z)=\{A\in\mathcal{P}^*(R)\mid z\in A,\ \exists[x]^n_{k_۱,\ldots,k_n},\ A=\sum_{i=۱}^{n}(\prod_{j=۱}^{k_i}x_{ij})\},$$
$$M(z)=\bigcup_{A\in P(z)}A.$$

قضیه ۴. فرض کنید R یک ابرمیدان باشد. در این صورت

۱) برای هر $z\in R$، زیرمجموعه $M(z)$ یک زیرمجموعه‌ی کامل R است،

۲) اگر $z\in w_R$ آنگاه $\mathcal{C}(z)=w_R$ و در نتیجه w_R یک زیرمجموعه کامل R است،

۳) برای هر $z\in R$ داریم $M(z)=w_R$.

قضیه ۵ اگر R یک ابرمیدان باشد آنگاه رابطه Γ یک رابطه هم‌ارزی است و $\Gamma=\Gamma^*$، که در آن Γ^* رابطه اساسی روی ابرمیدان R است، و در نتیجه R/Γ حلقه تقسیم است.

برهان: فرض کنید $x\ \Gamma^*\ y$. در این صورت اعضایی مانند $u,v\in w_R$ وجود دارند به‌قسمی‌که $y\in x\cdot v$ و $x\in x\cdot w$. بنا بر قضیه ۴، $M(u)=w_R$، بنابراین عضوی مانند $A\in P(u)$ وجود دارد به‌قسمی‌که $v\in A$. حال اگر $A=\sum\limits_{i=۱}^{n}(\prod\limits_{j=۱}^{k_i}x_{ij})$ آنگاه

$$\{x,y\}\in x\cdot\sum_{i=۱}^{n}(\prod_{j=۱}^{k_i}x_{ij})=\sum_{i=۱}^{n}(x\cdot\prod_{j=۱}^{k_i}x_{ij}),$$

و بنابراین $x\ \Gamma\ y$. □

مثال ۱. قضیه ۵، برای نیم‌ابرحلقه‌ها درست نیست. قرار دهید $R = \{a, b, c, d\}$ و ابرعمل‌های زیر را در نظر بگیرید:

$+$	a	b	c	d
a	$\{b, c\}$	$\{b, d\}$	$\{b, d\}$	$\{b, d\}$
b	$\{b, d\}$	$\{b, d\}$	$\{b, d\}$	$\{b, d\}$
c	$\{b, d\}$	$\{b, d\}$	$\{b, d\}$	$\{b, d\}$
d	$\{b, d\}$	$\{b, d\}$	$\{b, d\}$	$\{b, d\}$

$\cdot$	a	b	c	d
a	$\{b, d\}$	$\{b, d\}$	$\{b, d\}$	$\{b, d\}$
b	$\{b, d\}$	$\{b, d\}$	$\{b, d\}$	$\{b, d\}$
c	$\{b, d\}$	$\{b, d\}$	$\{b, d\}$	$\{b, d\}$
d	$\{b, d\}$	$\{b, d\}$	$\{b, d\}$	$\{b, d\}$

ابرعمل $+$ شرکتپذیر است، زیرا برای هر $x, y, z \in R$، داریم

$$x + (y + z) = \{b, d\} = (x + y) + z.$$

ابرعمل $\cdot$ نیز شرکت‌پذیر است. همچنین برای هر $x, y, z \in R$، داریم $x \cdot (y + z) = \{b, d\} = x \cdot y + x \cdot z$، لذا ابرعمل $\cdot$ روی ابرعمل $+$ دارای خاصیت پخشی است. از این نتیجه می‌شود که ابرساختار $(R, +, \cdot)$ یک نیم‌ابرحلقه است. حال داریم $c\Gamma^* d$ ولی $c \not\Gamma d$، بنابراین $\Gamma \neq \Gamma^*$.

مراجع

[1] Corsini P., *Prolegomena of hypergroup theory*, Second edition, Aviani editor, 1993.

[2] Davvaz B. and Salasi A., *A realization of hyperrings*, Comm. Algebra, Vol. 34(12), pp. 4389-4400, 2006.

[3] Davvaz B. and Vougiouklis T., *Commutative rings obtained from hyperrings (H_v-rings) with α^*-relations*, Comm. Algebra, Vol. 35, pp. 3307-3320, 2007.

[4] Mirvakili S., Anvariyeh S. M. and Davvaz B., *On α-relation and transitivity conditions of α*, Comm. Algebra, 36(05) 1695-1703, 2008.

[5] Vougiouklis T., *The fundamental relation in hyperrings. The general hyperfield*, Proc. Fourth Int. Congress on Algebraic Hyperstructures and Applications (AHA 1990), World Scientific, pp. 203-211, 1991.