بیستمین سمینار جبر،
۲ و۳ اردیبهشت ۱۳۸۸، صفحه۴–۸،
دانشگاه تربیت معلم

هموارى و همواری پوچ ـساز

اکبر گلچین
دانشگاه سیستان و بلوچستان $agdm@math.usb.ac.ir$
الهام خداپرست*
دانشگاه سیستان وبلوچستان $el\_kh\_85@yahoo.com$

چکیده

دراین مقاله به بیان خاصیت همواری براساس یک به یک بودن نگاشت φ متناظر با نمودار برابرکننده‌های خاص پرداخته، سپس به رابطه بین همواری و همواری پوچ ـساز می‌پردازیم. در ادامه کلاس‌هایی از مونوئیدها را معرفی می‌کنیم که مطلقاً هموار پوچ ـساز می‌باشند و سپس با مثالی نشان می‌دهیم، مونوئیدهایی وجود دارند که مطلقاً هموار پوچ ـساز نیستند.

۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف ۱. نیم‌گروه S را صفر راست می‌نامیم هرگاه، برای هر $z,\ s \in S$، $sz = z$. مونوئید S را حذف پذیر چپ می‌نامیم هرگاه، هر $s \in S$ حذف پذیر چپ باشد یعنی، برای $x, y \in S$ تساوی $sx = sy$ ایجاب کند $x = y$. فرض کنیم S یک مونوئید با عنصر همانی 1_S و A یک مجموعه ناتهی باشد. A را یک Sـسیستم چپ گوییم هر گاه، نگاشتی چون $S \times A \longrightarrow A$، $(s, a) \longrightarrow sa$، موجود باشد که: $1_S a = a$ و $\forall s, t \in S, \forall a \in A : \quad (st)a = s(ta)$. Sـسیستم چپ A را با $_SA$ نمایش می‌دهیم. Sـسیستم راست A_S نیز به طریق مشابه تعریف می‌شود. فرض کنیم B_S یک زیرسیستم دلخواه از A_S باشد. همنهشتی ρ_B روی A_S را که به صورت زیر تعریف می‌شود

واژه‌های کلیدی : حذف پذیری، صفر راست، همواری، همواری پوچ –ساز.
رده بندی موضوعی (MSC2000): $20M30$.

$a,a' \in B$ یا $a = a' \iff a \; \rho_B \; a'$ یک همنهشتی ریس گوییم و سیستم خارج قسمتی A/ρ_s را که با A/B نشان می‌دهیم، سیستم خارج قسمتی ریس می‌نامیم. بخصوص اگر $K_S \subset S_S$ یک ایدآل راست باشد، آنگاه S/K سیستم خارج قسمتی ریس S_S تولید شده توسط ایدآل راست K_S گوییم.

A_S را هموار گوییم هر گاه، تابعگون $A_S \otimes_S -$ حافظ تکریختی‌ها از S_سیستم‌های چپ باشد. A_S را ضعیف هموار گوییم هر گاه، تابعگون $A_S \otimes_S -$ حافظ تکریختی‌ها از ایدآل‌های چپ S به توی S باشد. A_S را به طور اساسی هموار ضعیف گوییم هرگاه، تابعگون $A_S \otimes_S -$ حافظ تکریختی‌ها از ایدآل‌های چپ اصلی S به توی S باشد. گوئیم A_S در شرط (LU) صدق می کند، هرگاه برای هر $a \in A_S$، $l \in A_S$ ی موجود باشد به طوری که $la = a$.

فرض کنیم S یک مونوئید باشد. نمودار برابرکننده زیر را در S_سیستم‌های چپ

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\iota"] & M \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & N \end{tikzcd}$$

که در آن می‌توان فرض کرد $E = \{m \in \; _SM | f(m) = g(m)\}$ و ι یک نگاشت شمول را در نظر می‌گیریم . با ضرب تانسوری A_S از چپ در نمودار بالا ممکن است $A \otimes E$، برابرکننده باشد یا نباشد. لذا بنا به خاصیت جهانی برابرکننده، نگاشت کانونی $\varphi : A \otimes E \longrightarrow E'$ که در آن $E' := \{a \otimes m \in A \otimes M | a \otimes f(m) = a \otimes g(m)\}$ برابرکننده $\text{۱}_A \otimes f$ و $\text{۱}_A \otimes g$ در کتگوری **Set** می‌باشد وجود دارد، به طوری که نمودار زیر تعویض‌پذیرمی باشد.

$$\begin{tikzcd} A \otimes E \arrow[r, "\text{۱}_A \otimes \iota"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \otimes M \arrow[r, shift left, "\text{۱}_A \otimes f"] \arrow[r, shift right, "\text{۱}_A \otimes g"'] & A \otimes N \\ E' \arrow[ur, "\iota'"'] & & \end{tikzcd}$$

فرض کنیم A_S یک S_سیستم راست، $_SM$ و$_SN$، S_سیستم‌های چپ و $f,g : \; _SM \longrightarrow \; _SN$، S–نگاشت باشند. گوییم A_S به کلاس $[_SM, \; f, \; g, \; _SN]_i$ تعلق دارد، هرگاه نگاشت φ در نمودار بالا یک به یک باشد.

علامت اختصاری $[_SM, \; _SN]_i$ را برای کلاس S–سیستم‌های راست متعلق به $[_SM, \; f, \; g, \; _SN]_i$، به ازای تمام انتخاب‌های ممکن از S–نگاشت‌های $f,g : \; _SM \longrightarrow \; _SN$، و $\bigcap[_SM, \; _SN]_i$ را به عنوان کلاس S–سیستم‌های راست متعلق به $[_SM \; , f \; , g \; , \; _SN]_i$ به ازای تمام انتخاب‌های ممکن از $_SM$ و $_SN$ و تمام انتخاب‌های ممکن از S–نگاشت‌های $f,g : \; _SM \longrightarrow \; _SN$ به کار می‌بریم. I را به عنوان ایده‌ال چپ S بکار می‌بریم . همچنین هنگامیکه هم‌دامنه مورفیسم‌ها یک سیستم فاکتور ریس باشد از نماد $\bigcap[M, \; M/N]_i$ استفاده می‌کنیم.

لم ۱. $A_S \in [{}_SM,\ f,\ g,\ {}_SN]_i$، اگر و فقط اگر از تساوی $a \otimes m = a' \otimes m'$ در $A_S \otimes {}_SM$ بطوریکه $\{x \in {}_SM \mid f(x) = g(x)\}$ $m, m' \in E =$، تساوی $a \otimes m = a' \otimes m'$ در $A_S \otimes {}_SE$ نتیجه شود، به عبارت دیگر $A_S \in [{}_SM,\ f,\ g,\ {}_SN]_i$، اگر و فقط اگر برای هر تکریختی $\iota : {}_SE \longrightarrow {}_SM$، نگاشت $1_A \otimes \iota : A_S \otimes {}_SE \longrightarrow A_S \otimes {}_SM$ یک به یک باشد.

تعریف ۲. فرض کنیم S یک مونوئید باشد. برای هر $s, t \in S$، مجموعه $L_{s,t} = \{u \in S | us = ut\}$ در صورت غیر تهی بودن یک ایدال چپ S می‌باشد که آن را ایدال پوچ ـساز S می‌نامیم. A_S را هموار پوچ ـساز گوئیم، هرگاه برای هر $s, t \in S$، نگاشت طبیعی $A_S \otimes L_{s,t} \longrightarrow A_S$ یک به یک باشد. با توجه به تعریف، سیستم‌های متعلق به کلاس $[S,\ S]_i$ هموار پوچ ـساز می‌باشند. مونوئید S را کاملاً هموار پوچ ـساز گوئیم، هرگاه همه سیستم‌های روی آن هموار-پوچ‌ساز باشند.

۲ بررسی خواص همواری سیستم‌ها

در این قسمت به بیان قضایا و نتایج اصلی می‌پردازیم.

قضیه ۱. عبارات زیر برای هر Sـ سیستم A_S هم ارز می‌باشند :

A_S(i هموار است.

$A_S \in \bigcap[{}_SM,\ {}_SN]_i$(ii.

$A_S \in \bigcap[{}_SM,\ {}_SM/N]_i$(iii.

$A_S \in \bigcap[{}_SM,\ \pi,\ \circ\ ,\ {}_SM/N]_i$(iv.

$A_S \in \bigcap[{}_SM,\ {}_SM]_i$(v.

قضیه ۲. اگر S یک مونوئید حذف‌پذیر چپ باشد، آن‌گاه هر Sـسیستم راست به کلاس $\bigcap[M,\ S]_i$ تعلق دارد.

نتیجه ۱. هر مونوئید حذف‌پذیر چپ، کاملاً هموار پوچ ـساز می‌باشد.

قضیه ۳. اگر S' یک نیم گروه صفر راست و $S = \{1\} \cup S'$، آن‌گاه همه S−سیستم‌های راست به کلاس $\bigcap[I,\ S]_i$ تعلق دارند.

نتیجه ۲. اگر $S = \{1\} \cup S'$، بطوریکه S' نیم‌گروه صفر راست باشد، آن‌گاه S کاملاً هموار پوچ ـساز می‌باشد.

با توجه به تعریف، واضح است که هر سیستم هموار، هموار پوچ ـساز می‌باشد. حال با ارائه مثالی نشان می‌دهیم که عکس این مطلب، همواره برقرارنیست.

مثال ۱. فرض کنیم $S = \{1,\ s,\ t\}$ یک مونوئید باشد که در آن s ، t صفرهای راست هستند. $M = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ به همراه جدول زیر یک Sـ سیستم چپ است.

	a	b	c	d	e
1	a	b	c	d	e
s	c	d	c	d	e
t	e	c	c	d	e

بنا به نتیجه قبل، هر Sـسیستم راست، از جمله Θ_S هموار پوچ ـساز است. حال نشان می‌دهیم که $\Theta_S = \{\theta\}$ به کلاس $\bigcap[M,\ M]_i$ تعلق ندارد و لذا طبق قضیه ۱، هموار نیست. فرض کنیم نمودار زیر که $E = \{e,\ d\}$ و ι نگاشت شمول است، نمودار برابرکننده $g,\ f$ باشد بطوریکه در آن

$$E \xrightarrow{\ \iota\ } M \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} M$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & b & c & d & c \end{pmatrix}, \qquad g(x) = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & d & d & d & c \end{pmatrix}.$$

با ضرب تانسوری Θ_s درنمودار بالا و با توجه به جدول، در $\Theta_S \otimes M$ داریم:

$$\theta \otimes d = \theta \otimes sb = \theta s \otimes b = \theta t \otimes b = \theta \otimes tb = \theta \otimes c =$$
$$\theta \otimes sa = \theta s \otimes a = \theta t \otimes a = \theta \otimes ta = \theta \otimes e.$$

اما چون d و e صفر سیستم هستند، $\theta \otimes e$ و $\theta \otimes d$ نمی‌توانند در $\Theta_S \otimes E$ برابر باشند، لذا بنا به لم ۱، $\Theta_S \notin [M,\ M]_i$.

حال با استفاده از قضیه زیر نشان می‌دهیم، مونوئیدهایی وجود دارند که مطلقاً هموار پوچ ـساز نیستند.

قضیه ۴. [۳] هرگاه K ایدال راستی از S باشد، S/K به‌طور اساسی هموار ضعیف می‌باشد اگر وفقط اگر، K در شرط (LU) صدق کند.

مثال ۲. فرض کنیم $S = \{۱,\ x,\ ۰\}$، بطوریکه $x^۲ = ۰$ یک مونوئید باشد. ادعا می‌کنیم همه سیستم‌ها به کلاس $[S,\ S]_i$ تعلق ندارند و لذا مونوئید S مطلقاً هموار پوچ ـساز نیست. در غیر این صورت، نمودار برابرکننده

$$K \xrightarrow{\ \iota\ } S \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} S$$

برای همومورفیسم‌های f و g، بطوریکه $f(۱) = x,\ g(۱) = ۰$ را در نظر می‌گیریم. سیستم فاکتور ریس S/K که در آن $K = \{۰,\ x\}$ تنها ایدآل (چپ، راست) غیر بدیهی S می‌باشد، به کلاس $[S,\ S]_i$ تعلق دارد. لذا $- \otimes_S S/K$ حافظ تمام نشانندهها، از ایدال‌های S به توی S می‌باشد. پس بنا به تعریف ۱، ضعیف هموار و لذا به طور اساسی هموار ضعیف است. و بنا به قضیه ۴، K باید در شرط (LU) صدق کند که یک تناقض است. زیرا، برای هر $y \in K$، $yx \neq x$.

مراجع

[1] Bulman-Fleming, S. and M.Kilp, *Equalizer and flatness properties of acts I*, Comm.Algebra 30(3),2002, 1475-1498.

[2] Kilp, M. U.Knauer, and A.Milhaiev, *Monoids, Acts and Categories*,W.de Gruyter, Berlin, 2000.